La division des figures planes comme source de problèmes pour l'enseignement de la géométrie

Marc Moyon

La division des figures planes comme source de problèmes pour l'enseignement de la géométrie[1]

Marc Moyon[2]

> « L'enseignement que l'on donne ne peut pas différer *beaucoup* de celui qu'on a reçu. »
> Emile Borel, *à propos de l'enseignement de la géométrie élémentaire*, 1907.

Que le propos d'Emile Borel soit toujours d'actualité au début du XXI^e siècle ou pas, la question n'est pas là. Mon exposé n'est pas non plus une contribution personnelle à la réflexion actuelle autour de la formation des maîtres[3]. Ma volonté serait plutôt de donner aux enseignants quelques éléments de réflexion sur l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques[4].

Le point de départ de ce travail est ma lecture de la *Practica Geometriae* de Fibonacci (XIII^e siècle) et notamment de la quatrième distinction dont le thème est la division des figures planes. Je complète mon propos avec un manuel de mathématiques édité au début du XX^e siècle : les *Curiosités géométriques* d'Emile Fourrey qui, dans son cinquième chapitre, aborde le même thème. Il est évident qu'il ne s'agit pas ici de mener une étude comparative des deux ouvrages ou des démarches de leur auteur mais plutôt de présenter la lecture de textes anciens comme une ressource pédagogique possible pour l'enseignant. Je propose donc ici d'en extraire plusieurs problèmes pour l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée.

---

[1] Exposé proposé lors de *La rencontre des IREM du Grand Ouest* à Rennes les 15-16 mai 2009. Je remercie l'ensemble des participants pour leurs remarques et autres corrections.

[2] Docteur en Histoire des mathématiques associé au CHSE de Lille1, marc.moyon@univ-lille1.fr, IREM de Lille & UMR Savoirs, Textes, Langage / Lille 3.

[3] Dans la continuité d'une charte signée en septembre 2008, les ministres de l'éducation nationale et de l'enseignement supérieur et de la recherche proposent de réformer les IUFM pour mettre en place la masterisation de la formation professionnelle.

[4] Dans cette perspective, mon travail est largement encouragé par les travaux du groupe EMTA (Enseignement des Mathématiques et Textes Anciens) de l'IREM de Lille, et de ceux de la Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques. Signalons que dans les diverses versions du projet de réforme cité précédemment, l'histoire des disciplines à enseigner doit faire partie, au même titre que son épistémologie et sa didactique, de la formation initiale de l'enseignant.

Le thème géométrique choisi, la division des figures planes, est intéressant à deux niveaux. D'abord, il s'agit de problèmes anciens, voire très anciens, avec des représentants dans plusieurs traditions linguistiques et géographiques[5]. Ces problèmes présentent en outre une double utilité. Pratiques, ils répondent à des problèmes sociaux, culturels et cultuels. Spéculatifs, ce sont des problèmes scolaires qui peuvent être envisagés comme prétextes à l'utilisation des *Eléments* d'Euclide. Etant donné les objectifs que nous nous sommes fixés, nous insisterons davantage sur le second aspect[6], au moins en ce qui concerne la *Practica geometriae*. Il est donc important, dans un premier temps, d'énoncer les principaux résultats des *Eléments* d'Euclide sur lesquels reposent les résolutions des problèmes proposés. Ensuite, l'ouvrage médiéval est présenté pour donner ensuite une traduction française et une analyse mathématique de trois de ses problèmes. Après une brève présentation des *Curiosités Géométriques*, plusieurs problèmes seront donnés avec leur résolution.

Les *Eléments* d'Euclide

Le choix des problèmes de divisions de figures planes permet d'illustrer deux thèmes importants des *Eléments* d'Euclide[7]. D'abord, il s'agit de la « théorie de l'équivalence en aire[8] », autrement dit celle de l'égalité de la grandeur assignée aux figures planes, à savoir l'aire. Ce procédé, aussi appelée « méthode des aires », correspond à la théorisation de la démarche empirique de découpage et de recomposition d'aires qui permet d'affirmer que deux surfaces sont égales. Toute la seconde partie du Livre I y est consacrée, et le Livre II l'applique largement. Le second thème qui occupe ici une place centrale est la théorie des rapports entre grandeurs. Le Livre V, aussi appelé le Livre d'Eudoxe[9], en donne les fondements. Le Livre VI, quant à lui, en donne les applications à la géométrie. Rappelons maintenant les résultats qui seront largement utilisés par la suite[10].

Le premier Livre des *Eléments* doit donner l'ensemble du matériel nécessaire pour permettre par étapes successives de construire pour toute figure rectiligne un parallélogramme qui lui soit égal. Outre le postulat des parallèles, cinq propositions sont essentielles et reposent

[5] Pour plus de détails à ce sujet ; [**Moyon**, 2008].
[6] Pour le premier aspect, lire [**Djebbar**, 2007], [**Moyon**, à paraître].
[7] Nous prenons comme référence l'édition de Heiberg dans la traduction française de B. Vitrac ; [**Vitrac**, 1990]
[8] [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 265
[9] En effet, la paternité du Livre V est traditionnellement attribuée à Eudoxe de Cnide (4e s. avant notre ère) mais la version qui nous est parvenue serait largement due à Euclide ; [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 112-113, [**Vitrac**, 1990], vol. 2, p. 14.
[10] Ne reprenant pas les démonstrations des énoncés, nous laissons au lecteur le soin de s'y reporter dans l'édition de référence. Enfin, (*Elem*. I. 4) renvoie à la 4e proposition du Livre I des *Eléments* d'Euclide.

sur les cas d'égalité des triangles[11]. Ces dernières peuvent être travaillées en classe. Les deux premières sont consacrées aux parallélogrammes, et les deux suivantes sont les propositions équivalentes pour les triangles.

> *Elem.* I.35[12] : « *Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.* »
>
> *Elem.* I.36[13] : « *Les parallélogrammes qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.* »
>
> *Elem.* I.37[14] : « *Les triangles qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.* »
>
> *Elem.* I.38[15] : « *Les triangles qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.* »
>
> *Elem.* I.43[16] : « *Dans tout parallélogramme les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale sont égaux entre eux.* »

Les quatre premières propositions seront généralisées par la première proposition du Livre VI qui sera largement convoquée dans les raisonnements de division des figures planes.

> *Elem.* VI.1[17] : « *Les triangles et les parallélogrammes qui sont sous la même hauteur sont l'un relativement à l'autre comme leurs bases.* »

Ce résultat est essentiel pour nos problèmes car il permet de diviser immédiatement un triangle ou un parallélogramme selon un rapport donné. En d'autres termes, étant donné un triangle *ABC* (Fig. 1), et un point *D* d'un de ses côtés – *BC* par exemple – alors les triangles *ABD* et *ADC* sont dans le même rapport que *BD* et *DC*, c'est-à-dire $\frac{BD}{DC} = \frac{ABD}{ADC}$[18].

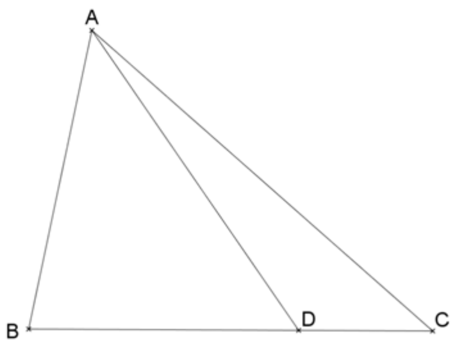


Figure 1

[11] *Elem.* I.4 : « *Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent.* », [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 200-203.
[12] [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 262-263.
[13] [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 263.
[14] [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 264.
[15] [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 264-265.
[16] [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 272-273.
[17] [**Vitrac**, 1990], vol. 2, p. 155-156.
[18] Nous préférons ici cette formulation et cette notation moderne plutôt que leurs équivalents « BD est à DC ce que *ABD* est à *ADC* » et BD : *DC* :: *ABD* : *ADC*.

La *Practica geometriae* de Fibonacci.

Fibonacci (ca.1170-ca.1240) est probablement le mathématicien européen le plus important du XIII^e^ siècle. Néanmoins, peu d'informations sur sa vie nous sont parvenues. Grâce à sa propre préface du *Liber Abbaci* [Livre de calcul][19], nous apprenons que son père est un haut administrateur des douanes de Béjaïa, comptoir pisan en Algérie. Grâce à cela, Fibonacci aurait été en contact direct avec la tradition arabe puisqu'il écrit avoir passé *quelques jours* dans une école d'abaque pour apprendre le calcul indien[20]. Pour le commerce, il aurait aussi visité les pays arabes comme l'Egypte et la Syrie. Ainsi, Fibonacci a nourri des contacts avec les traditions commerciales et probablement scientifiques arabes, et l'examen de son œuvre semble montrer une connaissance des mathématiques arabes des IX^e^ et X^e^ siècles. Nous ne pouvons néanmoins pas savoir s'il a eu un accès direct aux textes arabes, à l'enseignement en arabe ou à des traductions latines réalisées en *Andalus* ou en Sicile.

En plus du *Liber Abbaci* qu'il publie à deux reprises, en 1202 et 1228, son œuvre mathématique compte, entre autre, la *Practica Geometriae* publiée en 1220, et deux opuscules publiés en 1225 : le *Liber Quadratorum* [Livre des <nombres> carrés][21] et le *Flos Leonardi* [Fleur de Léonard]. Ces deux derniers ouvrages ont pour origine des défis mathématiques lancés par Jean de Palerme, mathématicien arabisant de la cour de Frédéric II de Hohenstaufen, en contact avec des écrits arabes dont aucune version latine ne serait connue.

Revenons à la *Practica Geometriae*[22] qui semble avoir été relativement importante pour les pratiques postérieures[23]. Dédiée à un certain *Magister Dominicus*[24], elle est destinée à l'apprentissage de la géométrie[25]. Dans la préface de son ouvrage, Fibonacci distingue explicitement deux groupes de lecteurs. Il vise ceux qui voudraient travailler en suivant des démonstrations géométriques, ce qui renvoie à la géométrie spéculative. Il s'intéresse aussi aux traditions des géométries pratiques en rédigeant pour ceux qui désireraient procéder selon un usage courant par opposition à ce que pourrait être le mode enseigné dans les écoles-cathédrale ou les universités.

[19] Edition latine dans [**Boncompagni**, 1857] ; traduction anglaise dans [**Sigler**, 2002].
[20] [**Boncompagni**, 1857], p. 1.
[21] Edition latine dans [**Boncompagni**, 1855], traductions française dans [**Ver Eecke**, 1952] et anglaise dans [**Sigler**, 1987].
[22] Edition latine dans [**Boncompagni**, 1862] et traduction anglaise dans [**Hughes**, 2008].
[23] [**Simi**, 2004]
[24] A. Simi suppose qu'il s'agirait de Maître Dominicus qui introduit Léonard de Pise à la cour de l'Empereur germanique Frederik II ; [**Simi**, 2004], p. 9.
[25] « *J'ai pris soin de cet ouvrage destiné à ton enseignement* » ; [**Boncompagni**, 1862], p. 1.

L'introduction de cet ouvrage[26] est importante ; elle a pour objet d'en fixer les bases. Fibonacci énonce d'abord quelques définitions et résultats géométriques (constructions, théorèmes et axiomes) en reprenant partiellement le Livre I des *Eléments* d'Euclide. Il présente enfin les unités de mesures linéaires et de surfaces utilisées à Pise au début du XIII^e^ siècle. Huit chapitres suivent cette introduction. Il commence par la mesure de surfaces carrées et rectangulaires dont les dimensions ne seraient pas données dans une seule et même unité. La multiplication à réaliser s'en trouve compliquée, et Fibonacci détaille les méthodes à utiliser. Dans les deuxième et cinquième chapitres, Fibonacci veut instruire son lecteur sur l'extraction des racines carrées et cubiques. Il s'inspire largement du chapitre 14 de son *Liber Abbaci*. Ensuite, le chapitre trois est entièrement consacré au « *mesurage de tous les champs*[27] ». C'est le chapitre le plus important quantitativement. Y sont traités, dans l'ordre, les triangles, les quadrilatères, les autres polygones, le cercle et ses portions, les figures circulaires. Le chapitre se termine sur le mesurage des champs à flanc de montagne, c'est-à-dire subissant une dénivellation. Quant au quatrième chapitre, il est centré sur la « *division des champs entre copropriétaires*[28] ». Malgré ce titre et à l'exception de trois problèmes, Fibonacci ne s'intéresse pas aux partages entre ayants droits ou héritiers[29] comme certains problèmes de la tradition arabe du découpage[30]. Il s'agit de problèmes géométriques de division de figures planes par une ou plusieurs transversales répondant à certaines contraintes. L'objectif du sixième chapitre est la détermination des dimensions des solides et notamment les calculs de volumes : parallélépipède, pyramide, cône et sphère. Il achève son chapitre sur la détermination du volume de solides inscrits dans une sphère. Dans le chapitre 7, sont proposés des problèmes de mesurage « sur le terrain » de hauteurs, de profondeurs et de largeurs à l'aide d'instruments tels que le quadrant dont la construction et l'utilisation sont expliquées. Ensuite, divers problèmes de géométrie sont posés en rapport avec l'inscription ou la circonscription d'une figure dans une autre. Il s'agit alors de déterminer le côté d'un polygone (pentagone ou décagone) en fonction du diamètre du cercle circonscrit et réciproquement. D'autres problèmes sont proposés pour déterminer les longueurs de transversales dans un triangle répondant à certaines contraintes. Fibonacci utilise deux types de raisonnement : l'algèbre et la théorie des rapports. Enfin, la dernière partie, quantitativement petite, est centrée sur des problèmes arithmétiques indéterminés.

---

[26] Ibid., p. 1-5.
[27] [**Boncompagni**, 1862], p. 30.
[28] [**Boncompagni**, 1862], p. 110.
[29] Trois problèmes semblent faire exception, [**Boncompagni**, 1862], p. 120, 125, 135.
[30] Voir *infra* le problème d'Abū-l-Wafā' choisi par E. Fourrey, ou [**Moyon**, à paraître].

Fibonacci débute la quatrième partie de son ouvrage en donnant un programme de travail explicite. Il ordonne les figures selon le nombre croissant de leurs côtés pour terminer avec le cercle et ses portions :

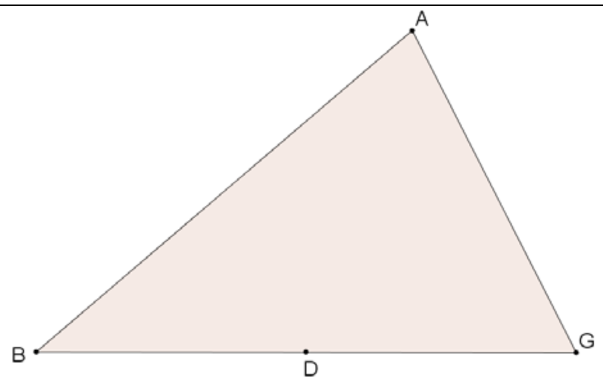
> Commence ici la quatrième [distinction] à propos de la division des champs entre copropriétaires.
> Nous divisons la quatrième distinction en quatre parties: dans la première nous ferons connaître la division des triangles, dans la seconde [celle] des quadrilatères, dans la troisième [celle] des polygones, [et] dans la quatrième [celle] des cercles et de ses portions[31].

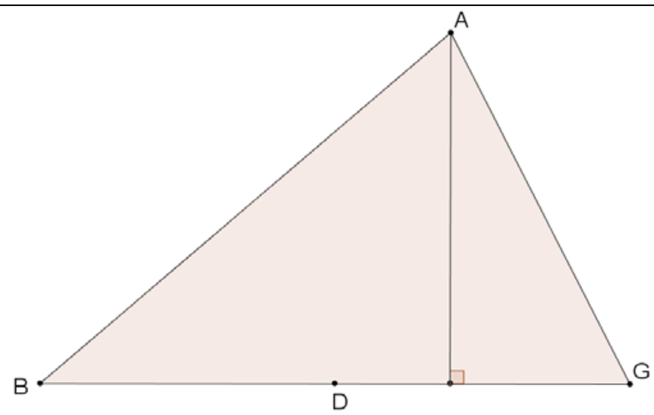
Dans la suite, nous présentons successivement les traductions françaises de trois problèmes : l'un sur les triangles, l'autre sur les quadrilatères et le dernier à propos du cercle. Ces traductions peuvent largement être lues et travaillées en classe dès la quatrième de collège. Celles-ci sont accompagnées d'une lecture mathématique rédigée en termes modernes, mais en conservant entièrement l'esprit du texte, pour une meilleure compréhension.

Problème sur les triangles.

<table>
<tr><td colspan="2"><Fib. IV.1>[32] Ainsi, lorsque tu veux diviser quelque triangle que ce soit en deux parties égales à partir d'un sommet, trace une ligne à partir de ce sommet jusqu'au milieu du côté étendu sous celui-ci ; et tu auras ce que tu désires.
Par exemple, nous voulons diviser le triangle ABG en deux [parties] égales à partir du point A.</td></tr>
<tr><td>Que soit divisé le côté BG en deux [parties] égales au point D (Fig. 2), et que soit tracée la droite AD.
Je dis que le triangle ABG est divisé en</td><td>Soit D le milieu de [BG]. [Elem. I.10][33]</td></tr>
</table>

[31] [**Boncompagni**, 1862], p. 110. Toutes les traductions qui suivent sont des traductions personnelles qui se veulent fidèles au texte latin quitte à sacrifier quelque peu le style de la langue française. Elles sont réalisées à partir de [**Boncompagni**, 1862], seule édition latine du texte de Fibonacci. Les mots entre crochets droits […] sont ajoutés dans notre traduction pour une meilleure compréhension du texte.
En outre, les figures présentes dans ce document ne sont pas celles transmises par la tradition manuscrite de l'œuvre de Fibonacci ; elles sont construites *a posteriori* pour mieux illustrer les démonstrations du mathématicien pisan. Les références entre parenthèses sont explicitement données par l'auteur, alors que celles entre crochets droits sont implicites.
[32] Les problèmes ne sont pas numérotés dans l'édition originale de Fibonacci. La numérotation correspond à la classification de l'ensemble des problèmes du chapitre 4 de la *Practica geometriae* réalisée dans [**Moyon**, à paraître] et reprise en annexe dans [**Moyon**, 2008].
[33] *Elem*. I.10 : « *Couper en deux parties égales une droite limitée donnée*. », [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 216.

deux triangles égaux.	 **Figure 2**
En effet, les deux triangles *ABD* et *ABG* sont égaux l'un à l'autre, puisqu'ils sont sur des bases égales, et sous la même hauteur qui est la hauteur menée de *A* sur la ligne *BG*.	<1ère démonstration> [*AD*] divise le triangle *ABG* en deux triangles égaux *ABD* et *ADG* avec des bases égales et une même hauteur. [*Elem*. I.38]
En effet, deux triangles construits l'un et l'autre sous la même hauteur sont comme les bases d'après le début du sixième Livre [d'Euclide]. C'est pourquoi, *BD* est à *DG* comme le triangle *ABD* est au triangle *ADG*.	$\frac{DB}{DG}=\frac{ABD}{ADG}$ (*Elem*. VI.1)
Comme la base *BD* est égale à la base *DG*, alors les deux triangles *ABD* et *ADG* sont égaux l'un à l'autre comme ce qui a été dit précédemment.	Mais, *BD* = *DG* donc, *ABD* = *ADG*.
Ou bien si nous traçons la hauteur issue de *A* sur la ligne *BG* (Fig. 3), elle-même sera de toute façon la hauteur de chacun des deux triangles *ABD* et *ADG*. La multiplication de la moitié de la hauteur par les bases *BD* et *DG* égale la multiplication de la moitié de cette même hauteur par la base *BG*.	<2ème démonstration> Traçons la perpendiculaire à (*BG*) passant par *A* : c'est alors la hauteur issue de *A* des triangles *ABD* et *ADG*.

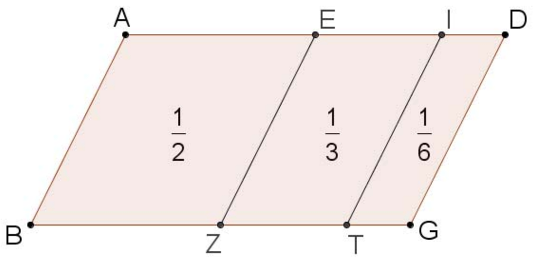
Comme de la multiplication de la moitié de la hauteur par les bases *BD* et *DG* provient l’aire des triangles *ABD* et *ADG*. Alors il est démontré que le triangle *ABD* est égal au triangle *ADG*.	 **Figure 3** Si *h* est cette hauteur ; $\frac{1}{2}h\times(BD+DG) = \frac{1}{2}h\times BG$. Le premier membre donne l’aire des deux triangles *ABD* et *ADG* ; donc, *ABD* = *ADG*.

Il est à remarquer que Fibonacci donne deux résolutions d’un même problème sans lien logique, et sans justification du besoin d’en énoncer deux différentes. Ces deux résolutions reprennent les deux modes de lectures envisagés dans l’introduction de la *Practica geometriae*. La première est savante avec des références explicites aux *Eléments* d’Euclide en paraphrasant le texte de la version de Campanus[34]. La seconde est plus algorithmique, caractéristique des géométries pratiques médiévales. S’appuyant sur le calcul de l’aire d’un triangle, cette dernière n’est absolument pas d’inspiration euclidienne. En effet, Euclide ne peut pas proposer une procédure de calcul d’aire ; il travaille sur des grandeurs « superposables ».

Problème sur les quadrilatères.

<Fib. IV.32> Soit un parallélogramme *ABGD* que nous voulons diviser en trois copropriétaires de manière inégale pour que le premier ait une moitié, le second un tiers [et] le troisième un sixième.

[34] C’est le cas pour la proposition *Elem*. I.38 ; [**Busard**, 2005], p. 203-204.

Je divise d'abord le parallélogramme *AG* en deux parallélogrammes égaux qui sont *AZ* et *EG*.	Soient *E* et *Z* les points de [*AD*] et [*BG*] tels que $ABZE = EZGD = \frac{1}{2}ABGD$ [Fib. IV.25][35]
Ensuite, je coupe de l'un d'eux un tiers qui sera le parallélogramme *IG*, c'est-à-dire que la droite *ID* est le tiers de *ED* (Fig. 4).	Soit *I* de [*ED*] tel que $ID = \frac{1}{3}ED$, alors $ITGD = \frac{1}{3}EZGD$. [Fib. IV.30][36]
Je dis que le parallélogramme *AG* est divisé dans les trois parties susdites dont la moitié est le parallélogramme *AZ*, et dont le sixième est le parallélogramme *IG* et le reste, à savoir le parallélogramme *ET* est le tiers de tout *AG*.	 **Figure 4** $ABZE = \frac{1}{2}ABGD$, $ITGD = \frac{1}{6}ABGD$ et $EZTI = \frac{1}{3}ABGD$.
Comme *ID* est le tiers de *ED*, *ID* sera le sixième de tout *AD*. Aussi je dis que le parallélogramme *IG* est le sixième du parallélogramme *AG* tout entier.	En effet, $ID = \frac{1}{3}ED = \frac{1}{6}AD$, donc $ITGD = \frac{1}{6}ABGD$. [*Elem*. VI.1] [$EZTI = EZGD - ITGD =$ $\frac{1}{2}ABGD - \frac{1}{6}ABGD = \frac{1}{3}ABGD$.]

Le problème choisi ici est l'un des trois problèmes dont l'énoncé aborde explicitement le partage entre copropriétaires. La résolution proposée est théorique et n'envisage pas la division du parallélogramme comme un partage réel. Il s'agirait donc d'un problème pseudo-concret qui, au mieux, trahit la source de ce type de problème.

[35] Fib. IV.25 : « *Diviser un parallélogramme en deux parties égales par une droite parallèle à deux côtés parallèles.* », [**Moyon**, à paraître].
[36] Fib. IV.30 : « *Couper un tiers d'un parallélogramme par une droite passant par un point donné sur un de ses côtés.* », [**Moyon**, à paraître].

Problème sur le cercle.

<table>
<tr><td colspan="2"><Fib. IV.75> Et si nous voulons retrancher d’un cercle donné <i>ABG</i> dont le centre est <i>D</i> une partie donnée – qui serait un tiers – [décrite] entre deux [droites] parallèles.

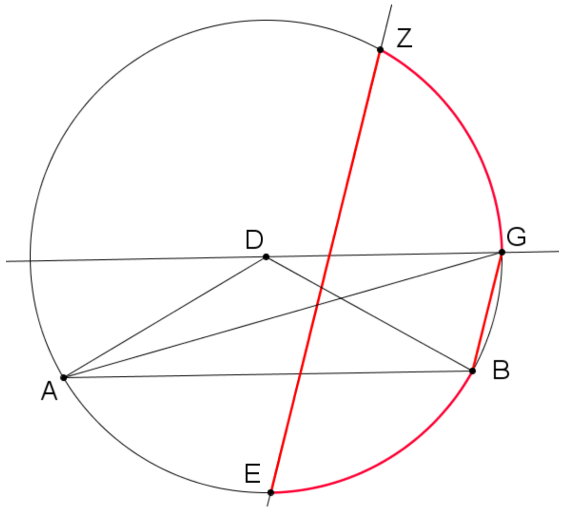


Figure 5</td></tr>
<tr><td>Je pose la droite AB comme le côté d’un triangle équilatéral inscrit dans le cercle ABG.
Et à partir du centre D, je pose la droite DG parallèle à AB. Je trace la droite BG.

Je divise l’arc AB, au point E, en deux [parties] égales.
Et je trace la droite EZ parallèle à la droite BG (Fig. 5).

Je dis que la figure contenue entre les droites BG et EZ, et les arcs EB et GZ est le tiers du cercle ABG.</td><td>Soit [AB] le côté d’un triangle équilatéral inscrit dans le cercle C passant par les points A, B et G. [Elem. I.1, Elem. IV.2][37]
Soit D le centre du cercle ABG.
Soit G le point du cercle ABG tel que (DG) soit parallèle à (AB). Tracer [BG]. [Elem. I.31][38]
Soit E de AB tel quel arc(AE) = arc(EB)[39]. [Elem. III.30][40]
Soit Z le point du cercle ABG tel que (EZ) soit parallèle à (BG). [Elem. I.31]</td></tr>
</table>

[37] *Elem*. I.1 : « *Sur une droite limitée donnée, construire un triangle équilatéral.* », [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 194 ; *Elem*. IV.2 : « *Dans un cercle donné, inscrire un triangle équiangle à un triangle donné.* », [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 470-471.

[38] *Elem*. I.31 : « *Par un point donné, mener une droite parallèle à une droite donnée.* », [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 253-255.

[39] Nous noterons arc(*AB*) le petit arc du cercle *C* défini par les points *A* et *B*.

[40] *Elem*. III.30 : « *Couper une circonférence donnée en deux parties égales.* », [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 448.

Preuve:	Preuve :
Je trace les droites DA, DB et AG (Fig. 5). Les triangles GAB et DAB seront égaux. Que leur soit ajoutée en commun la portion ABE, la figure contenue entre les droites GA, GB et l'arc AEB sera égale au secteur DAEB qui est le tiers du cercle ABG. Donc, la figure contenue entre les droites GA et GB et l'arc AEB est le tiers du cercle ABG.	Traçons (DA), (DB) et (AG). GAB = DAB [*Elem.* I.37] GAB + ABE = DAB + ABE [*Elem.* n.c.2][41] d'où $S_{GAEB} = DAEB$ si S_{GAEB} est la surface délimitée par [GA], [GB] et le petit arc AB. Comme $DAEB = \frac{1}{3}ABG$, alors $S_{GAEB} = \frac{1}{3}ABG$ [*Elem.* n.c.1][42]
Et puisque les droites BG et EZ sont parallèles, les arcs EB et GZ sont égaux. Mais l'arc EB est égal à l'arc AE. L'arc AE est donc égal à l'arc GZ .	arc(EB) = arc(GZ) car (BG)//(EZ) arc(EB) = arc(AE), donc arc(AE) = arc (GZ) [*Elem.* n.c.1]
En leur ajoutant en commun l'arc BG, l'arc AEBG sera égal à l'arc EBGZ.	arc(EB) + arc(AE) + arc(BG) = arc(EB) + arc (GZ) + arc(BG) [*Elem.* n.c.2] autrement dit arc($AEBG$) = arc (EBGZ)
Comme la portion de cercle EZGB est égale à la portion de cercle AGBE ; en leur retranchant en commun la portion contenue entre la droite BG et l'arc GB, il restera la figure contenue entre les droites GB et EZ, et les arcs BE et GZ égale au tiers du cercle, à savoir la figure contenue entre les droites GA et GB et l'arc AEB. Ce qu'il fallait montrer.	seg(EZGB) = seg(AGBE)[43] [*Elem.* III.24][44] $EZGB - S_{GB} = AGBE - S_{GB}$ [*Elem.* n.c.3][45] si S_{GB} est la surface comprise entre [GB] et le petit arc GB. Donc $S_{GAEB} = S_{EZGB}$. Comme $S_{GAEB} = \frac{1}{3}C$ alors $S_{EZGB} = \frac{1}{3}C$. [*Elem.* n.c.1]

[41] *Elem.* n.c. (notions communes) 2 : « *Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.* », [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 178.
[42] *Elem.* n.c.1 : « *Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.* », [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 178.
[43] seg(EZGB) renvoie au segment de cercle EZGB c'est-à-dire, d'après *Elem*. def.III.2, « *la figure contenue* » par la drote (*EZ*) et la circonférence (*EZGB*) ; [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 388.
[44] *Elem*. III.24 : « *Les segments de cercles semblables sur des droites égales sont égaux entre eux.* », [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 438-439.
[45] *Elem.* n.c.3 : « *Et si, à de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.* », [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 178.

Ce problème est très intéressant car il permet de travailler, à partir de résultats élémentaires, sur le cercle et ses portions, ce qui n'est pas souvent le cas dans l'enseignement secondaire. Sa démonstration est, par ailleurs, une excellente illustration de la manière avec laquelle peut être utilisée la méthode des aires du Livre I des *Eléments*. Il est à noter que la figure est essentielle pour comprendre les différentes étapes de la démonstration. Dans un premier temps, il est même vivement conseillé de faire réfléchir les élèves directement sur la figure plutôt que sur le formalisme mathématique. Le coloriage des surfaces considérées tour à tour peut être intéressant pour accéder à la beauté du raisonnement proposé par Fibonacci.[46]

Les *Curiosités géométriques* d'Emile Fourrey.

Cet ouvrage est le troisième de son auteur. Edité pour la première fois en 1907[47], il est rédigé dans un climat d'intense activité mathématique et de réflexions sur l'enseignement des mathématiques. Il représente doublement le contexte très particulier du début du XX^e^ siècle, à savoir celui de la réforme Georges Leygues de 1902. Les principaux architectes et promoteurs sont des mathématiciens de renom comme, entre autres, Emile Borel (1871-1956), Jacques Hadamard (1865-1963) ou Henri Lebesgue (1875-1941). Le but de cette réforme était, en particulier, d'introduire de manière nouvelle les sciences dans l'enseignement secondaire. C'est donc dans cet esprit qu'Emile Fourrey publie deux de ses ouvrages : les *Récréations arithmétiques* en 1899[48] et les *Curiosités géométriques* en 1904. Son idée est alors d'*« Instruire en présentant la science par ses côtés curieux*[49]. » Il insiste sur les aspects intuitifs et expérimentaux de la géométrie, sur le dessin géométrique et sur la mesure des grandeurs géométriques qui participent de cet aspect expérimental. Même s'il le fait de manière « *schématique et lacunaire* »[50], E. Fourrey introduit une dimension historique des notions envisagées avec une « *Esquisse de l'histoire de la géométrie élémentaire*[51] ». Après cette introduction historique, l'auteur divise son ouvrage en trois parties. Dans la première, l'auteur reprend les définitions des principaux objets géométriques et étudie leur transformation à travers l'histoire depuis les *Eléments* d'Euclide jusqu'aux ouvrages qui lui

---

[46] Ce type de démonstration est l'occasion de montrer aux élèves une animation Flash *via* le videoprojecteur qui montre les étapes successives de la démonstration. En exercice, les élèves (fin de collège ou lycée) peuvent les justifier à partir de leur connaissance personnelle.
[47] Après sa première publication, l'ouvrage d'Emile Fourrey a été édité plusieurs fois. Notre édition de référence est la quatrième, datée de 1938 ; [**Fourrey**, 1994]. Nous avons aussi consulté la dernière édition augmentée d'une préface d'Evelyne Barbin et réalisée en 1994 ; [**Fourrey**, 1994]. Enfin, l'édition de 1907 est consultable sur le site *scientifica* de la Cité des Sciences & de l'Industrie.
[48] [**Fourrey**, 2001]
[49] [**Fourrey**, 1994], avant-propos.
[50] E. Barbin dans [**Fourrey**, 1994], p. viii.
[51] [**Fourrey**, 1938], p. 1-32.

sont contemporains. Il poursuit avec une anthologie de démonstrations du seul théorème de l'hypoténuse, dit théorème de Pythagore. Il achève cette partie sur des casse-têtes et des paralogismes géométriques. La seconde partie traite de la géométrie de la mesure. Elle est elle-même divisée en cinq chapitres dont les thèmes sont les instruments de dessin et de topographie, la mesure des polygones, la mesure du cercle, la division des figures planes et enfin la stéréométrie. La dernière partie, quant à elle, propose plusieurs applications classiques de la géométrie : la représentation graphique des opérations arithmétiques, l'étude de plusieurs pavages du plan et autres divertissements géométriques.

Plus qu'un manuel d'enseignement, cet ouvrage est davantage un recueil de problèmes. Emile Fourrey, largement documenté, a lui-même opéré une savante sélection à partir de sources historiques diverses tant du point de vue des époques que des traditions linguistiques. En effet, en fonction des thèmes, se côtoient des problèmes de l'antiquité grecque, du moyen-âge latin ou encore des traditions indiennes et arabes mais aussi des résolutions et démonstrations contemporaines à l'auteur. Il utilise des éditions et traductions de textes originaux mais surtout des articles de revues et journaux spécialisés du XIX^e^ siècle parmi lesquels le *Journal des Savants*, les *Philosophical transactions*, le *Journal Asiatique* et autres comptes-rendus d'Académies. Tous ces problèmes montrent la diversité et la richesse de la géométrie élémentaire avec ses aspects aussi bien expérimentaux que théoriques.

Etudions maintenant quelques-uns de ces problèmes pour le thème qui nous intéresse ici, la division des figures. Nous avons choisi ces problèmes pour leur adéquation avec les programmes de l'enseignement du secondaire ou pour leur intérêt culturel. Il n'est pas question ici de faire une étude historiographique de la sélection d'Emile Fourrey ou de discuter des sources disponibles à son époque et aujourd'hui désuètes. Nous reprenons seulement le texte de l'auteur qui est suffisant pour comprendre la construction proposée[52].

Il m'a d'abord semblé utile de reprendre la construction d'une moyenne proportionnelle qui est largement utilisée dans plusieurs problèmes de division des figures. Elle repose sur les deux énoncés euclidiens suivants :

> *Elem.* III.31[53] : « *Dans un cercle, (…) l'angle dans le demi-cercle est droit (…)* ».
> *Elem.* VI.8 (Porisme)[54] : « *A partir de ceci, il est évident que (…) de la base et de l'un ou l'autre des segments, le côté adjacent au segment est moyen proportionnel*. »

[52] Pour une meilleure compréhension de certains passages, nous ajoutons quelques précisions entre crochets droits […].
[53] [**Vitrac**, 1990], vol. 1, p. 449-450.
[54] [**Vitrac**, 1990], vol. 2, p. 178. Cette seconde partie du porisme est signalée comme une interpolation possible du texte original.

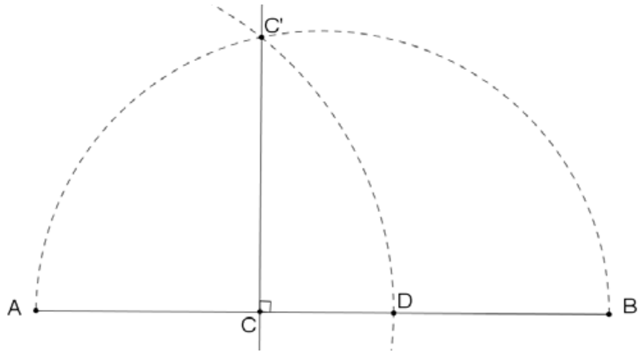


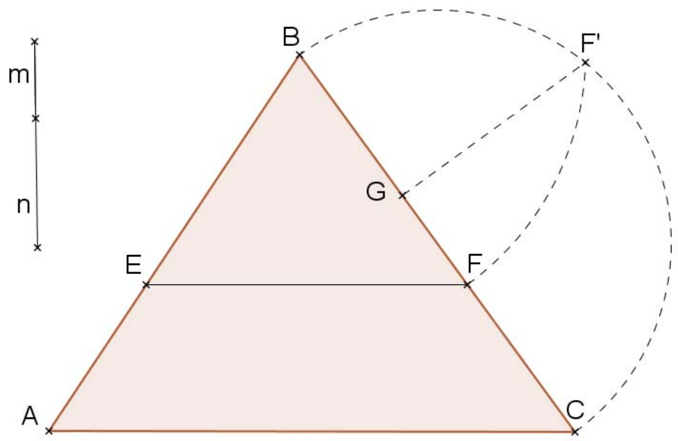
Figure 6

Construire le point D de AB tel que AD soit moyenne proportionnelle de AC et AB, c'est-à-dire que $AD^2 = AC \times AB$ ou bien $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AD}{AB}$.

Décrire un demi-cercle de diamètre AB. Soit C' le point d'intersection du demi-cercle avec la perpendiculaire à AB passant par C (Fig. 6).

Le cercle de centre A et de rayon AC' coupe AB en D, c'est le point cherché.

Problème de triangles.

Diviser un triangle *ABC* en deux parties proportionnelles à *m* et *n* par une parallèle *EF* à l'un des côtés *AC*.	
 **Figure 7**	$\dfrac{BEF}{BAC} = \dfrac{m}{m+n} = \dfrac{BF^2}{BC^2}$ Il en résulte $BF^2 = \left(\dfrac{m}{m+n} \times BC\right) \times BC$ [Divisons BC en parties proportionnelles à m et n en G ; $BG = \left(\dfrac{m}{m+n} \times BC\right)$] BF est donc moyenne proportionnelle entre BG et BC. On en déduit la construction indiquée ci-contre (Fig. 7).

L'auteur précise que ce problème peut être généralisé avec la division d'un triangle en un nombre quelconque de parties proportionnelles.

Problème de trapèzes.

Diviser un trapèze *ABCD* en deux parties proportionnelles à *m* et *n* par une parallèle aux bases.

Soit *I* le point d'intersection des côtés non-parallèles *AB*, *CD* et *IC'F'D* la demi-circonférence décrite sur *ID* comme diamètre. De *I* comme centre, avec le rayon *IC*, rabattons *C* en *C'* et projetons *C'* en *H* (Fig. 8).

Divisons *HD* en parties proportionnelles à *m* et *n* au point *G*. Projetons *G* en *F'* et rabattons *F'* en *F* avec le rayon *IF'*.

La parallèle *EF* à *AD* menée par *F* est la droite cherchée (Fig. 8).

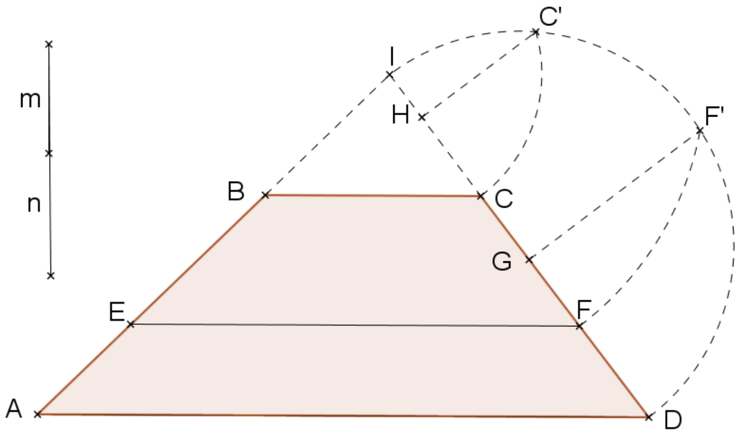


Figure 8

En effet, on a par des considérations de similitude[55] : $\frac{AEFD}{ABCD} = \frac{IAD - IEF}{IAD - IBC} = \frac{ID^2 - IF^2}{ID^2 - IC^2}$

Ou encore, puisque par construction $IF^2 = IG \times ID$ et $IC^2 = IH \times ID$,

$$\frac{AEFD}{ABCD} = \frac{ID - IG}{ID - IH} = \frac{GD}{HD} = \frac{m}{m+n}$$

Emile Fourrey achève son chapitre sur la « Division des figures planes » avec des questions diverses. Il reprend alors plusieurs problèmes de la littérature mathématique. Nous reprenons deux de ces problèmes car leur utilisation en classe peut être intéressante. Le premier permet d'exposer une utilisation des mathématiques pour répondre à un problème réel de partage entre ayant-droits lié à la jurisprudence en pays d'Islam. Il s'agit d'un énoncé du traité de

[55] A propos de la similitude, il est intéressant de lire Emile Borel : « *Il convient dans l'enseignement élémentaire, de considérer la notion de similitude comme une notion première : c'est une notion des plus simples que chacun a sans faire de géométrie ; il suffit d'avoir constaté que l'idée de forme est indépendante de l'idée de grandeur.* », *Bulletin de la Société française de Philosophie*, tome VII, 1907, cité par Rudolf Bkouche, [**Bkouche, Lubet & Marmier**, 2009], p. 42.

géométrie d'Abū-l-Wafā'[56]. Il peut être proposé à la suite du problème précédent de partage de parallélogramme de la *Practica geometriae*. Le second problème est, quant à lui, un exercice original de géométrie dont les outils de résolution sont vus dès la quatrième de collège. Il est extrait du *Journal de Vuibert*.

Problème de partage entre ayant-droits.

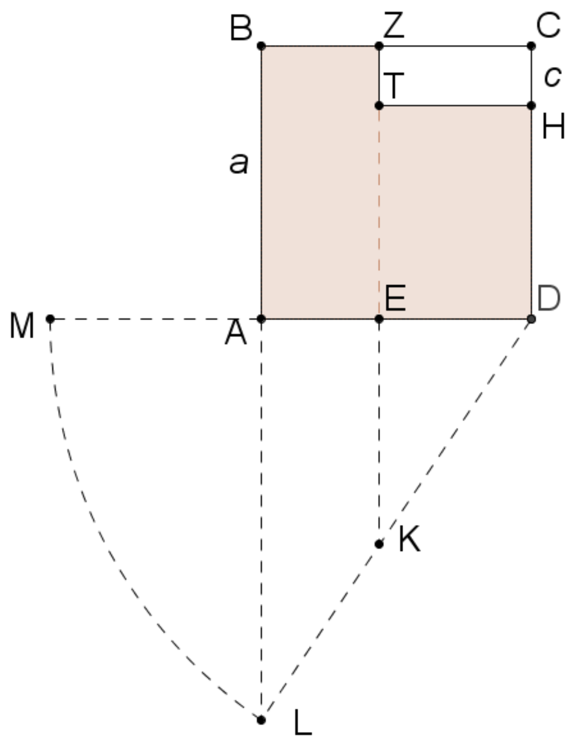
<table>
<tr><td colspan="2">Diviser le carré ABCD de côté a en deux parties équivalentes, de sorte qu'il y ait encore un chemin d'une largeur donnée c conduisant aux deux parties.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">

Figure 9</td><td>Sur CD prenons CH = c, prolongeons DA de la quantité AM = DH = a-c, et prolongeons de même BA jusqu'à sa rencontre en L avec l'arc décrit de D comme centre et ayant DM comme rayon. Prenons sur LD, LK = DH, et par K menons KZ parallèle à LB ; une parallèle à BC menée par H complète le tracé.</td></tr>
<tr><td>Nous allons montrer que les deux rectangles ABZE et ETHD sont équivalents. En effet, les parallèles AL et EK donnent :
$AE = \frac{LK \times AD}{LD} = \frac{(a-c)a}{2a-c}$
On en déduit $ABZE = \frac{a^2(a-c)}{2a-c}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">On a d'autre part $ETHD = DH \times DE = (a-c)(a-AE) = \frac{a^2(a-c)}{2a-c}$
[d'où ETHD = ABZE]</td></tr>
</table>

[56] Emile Fourrey avait connaissance de ce texte par l'étude et la traduction partielles de F. Woepcke, éminent orientaliste du XIX[e] siècle ; [**Woepcke**, 1855]. Aujourd'hui, une édition arabe est disponible ; [**Abû-l-Wafâ'**, 1979].

Autre problème.

<table>
<tr><td colspan="2">Dans un carré ABCD, on joint le milieu de chaque côté aux extrémités du côté opposé ; l’octogone intérieur convexe ainsi formé a pour aire la sixième de celle du carré.</td></tr>
<tr><td>

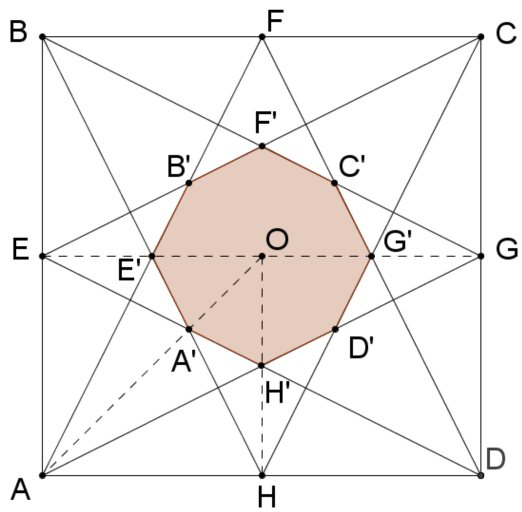


Figure 10

</td><td>Pour prouver que les aires de l’octogone A’E’B’F’C’G’D’H’ et du carré ABCD sont dans le rapport de 1 à 6, il suffit de montrer qu’il en est de même des aires des triangles A’OH’ et AOH, O désignant le centre du carré.
Or puisque OH’ = H’H, on a aussi
$A'OH' = \frac{1}{2} A'OH$</td></tr>
<tr><td colspan="2">D’autre part, dans le triangle AEG, les médianes AO et EH’ se coupent au tiers de leur longueur à partir de la base ; on a donc $OA' = \frac{1}{3} OA$ et $A'OH = \frac{1}{3} AOH$

Par suite $A'OH' = \frac{1}{6} AOH$.</td></tr>
</table>

Conclusion

L’introduction de l’histoire des mathématiques dans l’enseignement ne doit, en aucun cas, être considérée comme un supplément d’âme mais « *elle doit s’intégrer à l’enseignement, qu’elle apparaisse effectivement dans la classe ou non ; en cela elle est l’affaire des professeurs*[57]. » À l’aide de ce présent exposé, l’enseignant peut convoquer l’histoire des mathématiques comme il le désire en fonction de sa culture personnelle et de sa propre conception pédagogique : soit par la mise en culture de son enseignement, soit par la lecture de textes anciens dans sa classe. Il peut encore proposer la seule résolution de problèmes historiques originaux sans engager les aspects historiques en tant que tels dans sa classe.

Enfin, quant à la place de la géométrie dans l’enseignement des mathématiques, je laisse le mot de la fin à Emile Borel qui dans un débat publié en 1907 dans le *Bulletin de la*

[57] [**Bkouche**, 2000]

Société Française de Philosophie, précise que « *l'enseignement moderne de la Géométrie, enseignement plus intuitif et plus expérimental, aurait sans doute pour effet de rendre les classes de mathématiques plus intéressantes, plus attrayantes, et il est probable que cette méthode nouvelle donnerait plus d'élèves ayant le goût pour les mathématiques.* »

Bibliographie

Abû-L-Wafâ', A.-B. [1979]; *Kitâb fî mâ yahtâju ilayhi as-sani^{c} min a^{c}mâl al-handasa [Livre de ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques]*, Al-^{C}ali, S. A. (edit.), Bagdad, Imprimerie de Bagdad, 1979, 177p.

Bkouche, R. [2000]; *Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science*, *Repères-IREM*, n°39, 2000, p.35-59.

Bkouche, R., Lubet, J. & Marmier, A.-M. [2009]; *Grandeurs et Nombres*, Lille, IREM de Lille, 2009, 108p.

Boncompagni, B. [1855]; *Intorno ad alcuni problemi trattati da Leonardo Pisano nel suo Liber Quadratorum*, Rome, Tipografia delle belle arti, 1855, 28p.

__________ [1857]; *Il liber abbaci*, Rome, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857, 459p.

__________ [1862]; *La practica geometriae di Leonardo Pisano*, Rome, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1862, 283p.

Busard, H. L. L. [2005]; *Campanus of Novara and Euclid's Elements*, Stuttgart, Franz Steiner Verlag, 2005, 768p.

Djebbar, A. [2007]; *La géométrie du mesurage et du découpage dans les mathématiques d'al-Andalus (X^{e}-XIII^{e} s.)*, Radelet-De Grave, P. (edit.), *Liber Amicorum Jean Dhombres*, Louvain la Neuve, Centre de recherche en histoire des sciences, 2007, p.113-147.

Fourrey, E. [1938]; *Curiosités géométriques*, Paris, Vuibert, 1938, 431p.

__________ [1994]; *Curiosités géométriques*, Paris, Vuibert, 1994, xvii-430p.

__________ [2001]; *Récréations arithmétiques*, Paris, Vuibert, 2001, 263p.

Hughes, B. [2008]; *Fibonacci's De Practica Geometrie*, New York, Springer, 2008, xxxvi-412p.

Moyon, M. [2008]; *La géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple de mesurage et du découpage : Contribution à l'étude des mathématiques médiévales*, Thèse de doctorat en Epistémologie et Histoire des Sciences (sous la direction de Djebbar, A.), Université de Lille, Lille, 2008, 2 volumes.

__________ [à paraître]; *Mathématiques et interculturalité: le découpage des figures de la Mésopotamie au moyen-âge latin*, Belmehdi, S. & Moyon, M. (edit.), *Mathématiques et interculturalité*, Lille, avril 2009, ???, à paraître, (à paraître).

__________ [à paraître]; *Le De Superficierum Divisionibus Liber d'al-Baghdâdî et ses prolongements en Europe*, Actes du 9e colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Alger, 12-14 mai 2007), à paraître, 35 p.

Sigler, L. E. [1987]; *The book of squares*, Boston, Academic Press, 1987, XX-124p.

__________ [2002]; *Fibonacci's Liber Abaci*, New York, Springer, 2002, VIII-636p.

Simi, A. [2004]; *L'eredità della Practica Geometriae di Leonardo Pisano nella geometria del basso medioevo e del primo rinascimento, Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche*, n°1, 2004, p.9-41.

Ver Eecke, P. [1952]; *Le livre des nombres carrés*, Paris, Blanchard, 1952, XXV-75p.

Vitrac, B. [1990]; *Euclide, Les éléments, Traduction et commentaires*, Paris, Presses Universitaires de France, 1990, 4 vols.

Woepcke, F. [1855]; *Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les orientaux d'après des traités inédits arabes et persans, Journal Asiatique*, 5ème série, Tome 5, 1855, p.218-256, 309-359.